Статистические методы обработки результатов численного моделирования

Фролькис В.А.

Регрессионный анализ на основе таблицы сопряженности

$X_i \setminus Y_j$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_{Ny}
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	$n_{1,Ny}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	$n_{2,Ny}$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	$n_{i,Ny}$
…	…	…	…	…	…	…
x_{Nx}	$n_{Nx,1}$	$n_{Nx,2}$	…	$n_{Nx,j}$	…	$n_{Nx,Ny}$

$$N = \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} n_{ij}$$

$$N_{x_i} = \sum_j n_{ij}$$

$$N_{y_j} = \sum_i n_{ij}$$

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

Регрессионный анализ на основе таблицы сопряженности

$X_i \setminus Y_j$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_{Ny}
x_1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	$n_{1,Ny}$
x_2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	$n_{2,Ny}$
…	…	…	…	…	…	…
x_i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	$n_{i,Ny}$
…	…	…	…	…	…	…
x_{Nx}	$n_{Nx,1}$	$n_{Nx,2}$	…	$n_{Nx,j}$	…	$n_{Nx,Ny}$

$$N = \sum_{i=1}^{Nx} \sum_{j=1}^{Ny} n_{ij}$$

$$N_{x_i} = \sum_j n_{ij}$$

$$N_{y_j} = \sum_i n_{ij}$$

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_i$$

M – число ненулевых групп

m – число коэффициентов в ур. регрессии

$$\nu_{Reg} = m - 1 \qquad \nu_{Err} = M - m$$

$$\mathrm{cor}_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{s_x s_y}$$

$$\mathrm{cov}(xy) = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$\bar{x} = 1/N \sum_{i,j} x_i n_{ij}$$

$$\overline{x^2} = 1/N \sum_{i,j} x_i^2 n_{ij}$$

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\bar{y} = 1/N \sum_{i,j} y_j n_{ij}$$

$$\overline{y^2} = 1/N \sum_{i,j} y_i^2 n_{ij}$$

$$s_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

$$\overline{xy} = 1/N \sum_{i,j} x_i y_i n_{ij}$$

$$\mathrm{cor}_{xy} = \frac{\mathrm{cov}(x, y)}{s_x s_y}$$

$$\mathrm{cov}(xy) = \overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}$$

$$\bar{x} = 1/N \sum_{i,j} x_i n_{ij} \qquad \overline{x^2} = 1/N \sum_{i,j} x_i^2 n_{ij} \qquad s_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2$$

$$\bar{y} = 1/N \sum_{i,j} y_j n_{ij} \qquad \overline{y^2} = 1/N \sum_{i,j} y_i^2 n_{ij} \qquad s_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2$$

$$\overline{xy} = 1/N \sum_{i,j} x_i y_i n_{ij}$$

$$J = \sum_{i,j} (\beta_0 + \beta_1 x_i - y_j)^2 n_{ij} \to \min$$

$$\beta_0 N + \beta_1 \sum_{i,j} x_i n_{ij} = \sum_{i,j} y_j n_{ij}$$

$$\beta_0 \sum_{i,j} x_i n_{ij} + \beta_1 \sum_{i,j} x_i^2 n_{ij} = \sum_{i,j} x_i y_j n_{ij}$$

$$\beta_1 = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\,\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} \qquad \beta_0 = \bar{y} - \beta_1 \bar{x}$$

$$Q_{tot} = Ms_y^2 \qquad Q_{Err} = \frac{M}{N}\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 n_{ij} \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$Q_{tot} = Ms_y^2 \qquad Q_{Err} = \frac{M}{N}\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 n_{ij} \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$R^2 = Q_{Reg} / Q_{tot}$$

$$F_{\mathrm{expr}} = R^2 (N - m) \Big/ (1 - R^2) = s_{Reg}^2 \Big/ s_{Err}^2 > F_{\alpha, \nu_{Reg}, \nu_{Err}}$$

$$s_{Err}^2 = Q_{Err} / \nu_{Err} \qquad s_{Reg}^2 = Q_{Reg} / \nu_{Reg}$$

$$s_{\beta_1}^2 = \frac{s_{Err}^2}{Ms_x^2} \qquad s_{\beta_0}^2 = s_{Err}^2 \, \overline{x^2} \Big/ (Ms_x^2)$$

$$Q_{tot} = Ms_y^2 \qquad Q_{Err} = \frac{M}{N}\sum_i (y_i - \hat{y}_i)^2 n_{ij} \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$R^2 = Q_{Reg} / Q_{tot}$$

$$F_{\text{expr}} = R^2 (N-m) \Big/ (1 - R^2) = s_{Reg}^2 \Big/ s_{Err}^2 > F_{\alpha, v_{Reg}, v_{Err}}$$

$$s_{Err}^2 = Q_{Err} / v_{Err} \qquad s_{Reg}^2 = Q_{Reg} / v_{Reg}$$

$$s_{\beta_1}^2 = \frac{s_{Err}^2}{Ms_x^2} \qquad s_{\beta_0}^2 = s_{Err}^2 \, \overline{x^2} \Big/ (Ms_x^2)$$

$$b_k \in \beta_k \mp t_{\alpha; v_{Err}} s_{\beta_k}, \ k = 1, 2$$

$$t_{\beta_k} = \beta_k \Big/ s_{\beta_k} > t_{\alpha, v_{Err}}$$

$$\sigma_{Err}^2 \in \left(Ms_{Err}^2 \Big/ \chi^2_{\alpha/2; v_{Err}} ; Ms_{Err}^2 \Big/ \chi^2_{1-\alpha/2; v_{Err}} \right)$$

$$s_{\hat{y}(x)}^2 = s_{Err}^2 \left(\frac{1}{M} + \frac{(x - \overline{x})^2}{s_x^2 M} \right)$$

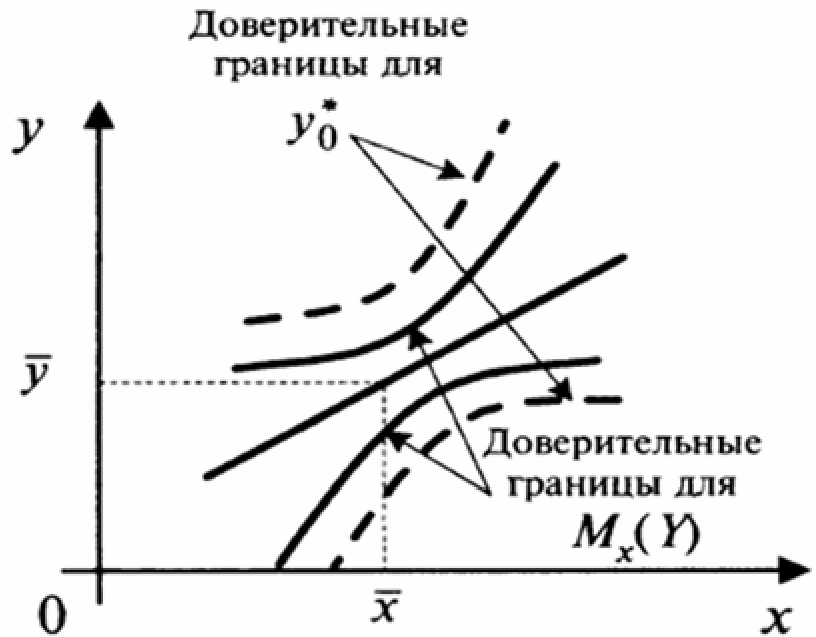
$$\hat{y}(x_a) - t_{\alpha;v_{Err}} s_{\hat{y}(x)} \le E(Y|X) \le \hat{y}(x_a) + t_{\alpha;v_{Err}} s_{\hat{y}(x)}$$

$$s^2_{\hat{y}(x)} = s^2_{Err}\left(\frac{1}{M} + \frac{(x-\bar{x})^2}{s_x^2 M}\right)$$

$$\hat{y}(x_a) - t_{\alpha;\nu_{Err}} s_{\hat{y}(x)} \le E(Y|X) \le \hat{y}(x_a) + t_{\alpha;\nu_{Err}} s_{\hat{y}(x)}$$

$$s^2_{\hat{y}(x)} = s^2_{Err}\left(1 + \frac{1}{M} + \frac{(x-\bar{x})^2}{s_x^2 M}\right)$$

$$\hat{y}(x_a) - t_{\alpha;\nu_{Err}} s_{\hat{y}(x_a)} \le E(Y|X) \le \hat{y}(x_a) + t_{\alpha;\nu_{Err}} s_{\hat{y}(x_a)}$$



Многофакторный регрессионный анализ

X_1	X_2	…	X_p	Y
x_{11}	x_{21}	…	x_{p1}	y_1
x_{12}	x_{22}	…	x_{p2}	y_2
…	…	…	…	…
x_{1i}	x_{2i}	…	x_{pi}	y_i
…	…	…	…	…
x_{1N}	x_{2N}	…	x_{pN}	y_N

Многофакторный регрессионный анализ

X_1	X_2	…	X_p	Y
x_{11}	x_{21}	…	x_{p1}	y_1
x_{12}	x_{22}	…	x_{p2}	y_2
…	…	…	…	…
x_{1i}	x_{2i}	…	x_{pi}	y_i
…	…	…	…	…
x_{1N}	x_{2N}	…	x_{pN}	y_N

$$\mathbf{r}_Y = \begin{pmatrix} 1 & r_{y1} & r_{y2} & r_{y3} & \ldots & r_{yp} \\ r_{1y} & 1 & r_{11} & r_{12} & \ldots & r_{1p} \\ r_{2y} & r_{21} & 1 & r_{23} & \ldots & r_{2p} \\ r_{3y} & r_{31} & r_{32} & 1 & \ldots & r_{3p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{py} & r_{p1} & r_{p2} & r_{p3} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{yk|12\ldots k-1,k+1,\ldots p} = -\frac{A_{yk}}{\sqrt{A_{yy}A_{kk}}}$$

A_{kl} – алгебраическое дополнение к элементу r_{kl}

Частная корреляция не обязательно говорит о причинной связи между переменными.

Дисперсионный анализ позволяет лучше ответить на этот вопрос

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \ldots & x_{NP} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y} = X\beta \qquad e_i = \hat{y}_i - y_i$$

$$e^{\mathrm{T}} e = (e_1, e_2, \ldots, e_p) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \ldots \\ e_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} e_i^2$$

$$N > p + 1$$

$$\hat{y}_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i1} + \ldots + \beta_p x_{ip}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{N1} & x_{N2} & \ldots & x_{NP} \end{pmatrix}$$

$$\hat{Y} = X\beta \qquad e_i = \hat{y}_i - y_i$$

$$e^{\mathrm{T}} e = (e_1, e_2, \ldots, e_p) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_1 \\ \ldots \\ e_p \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{p} e_i^2$$

$$N > p + 1$$

$$S = \sum_{i=1}^{p} (\hat{y}_i - y_i)^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 = (Y - X\beta)^{\mathrm{T}} (Y - X\beta) \to \min$$

$$X^{\mathrm{T}} X\beta = X^{\mathrm{T}} Y \qquad \beta = (X^{\mathrm{T}} X)^{-1} X^{\mathrm{T}} Y$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{\beta_j}^2 = s_{Err}^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right]_{jj} \qquad t_{\beta_j} = \left| \beta_j \right| \Big/ s_{\beta_j} > t_{\alpha, N-p-1}$$

$$b_j \in \beta_j \mp t_{\alpha; N-p-1} s_{\beta_j}$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{\beta_j}^2 = s_{Err}^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right]_{jj} \qquad t_{\beta_j} = \left| \beta_j \right| \Big/ s_{\beta_j} > t_{\alpha, N-p-1}$$

$$b_j \in \beta_j \mp t_{\alpha; N-p-1} s_{\beta_j}$$

$$\sigma_{Err}^2 \in N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{\alpha/2; N-p-1}^2 ; N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{1-\alpha/2; N-p-1}^2$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{\beta_j}^2 = s_{Err}^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right]_{jj} \qquad t_{\beta_j} = \left| \beta_j \right| \Big/ s_{\beta_j} > t_{\alpha, N-p-1}$$

$$b_j \in \beta_j \mp t_{\alpha; N-p-1} s_{\beta_j}$$

$$\sigma_{Err}^2 \in N s_{Err}^2 \Big/ \chi^2_{\alpha/2; N-p-1} ; N s_{Err}^2 \Big/ \chi^2_{1-\alpha/2; N-p-1}$$

$$Q_{Tot} = \sum\nolimits_i (y_i - \overline{y})^2 \quad Q_{Err} = \sum\nolimits_i (y_i - \tilde{y}_i)^2 \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{\beta_j}^2 = s_{Err}^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right]_{jj} \qquad t_{\beta_j} = \left| \beta_j \right| \Big/ s_{\beta_j} > t_{\alpha, N-p-1}$$

$$b_j \in \beta_j \mp t_{\alpha; N-p-1} s_{\beta_j}$$

$$\sigma_{Err}^2 \in N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{\alpha/2; N-p-1}^2 ; N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{1-\alpha/2; N-p-1}^2$$

$$Q_{Tot} = \sum_i (y_i - \overline{y})^2 \quad Q_{Err} = \sum_i (y_i - \tilde{y}_i)^2 \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$R^2 = Q_{Reg} \Big/ Q_{tot}$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{\beta_j}^2 = s_{Err}^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right]_{jj} \qquad t_{\beta_j} = \left| \beta_j \right| \Big/ s_{\beta_j} > t_{\alpha, N-p-1}$$

$$b_j \in \beta_j \mp t_{\alpha; N-p-1} s_{\beta_j}$$

$$\sigma_{Err}^2 \in N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{\alpha/2; N-p-1}^2 ; N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{1-\alpha/2; N-p-1}^2$$

$$Q_{Tot} = \sum_i (y_i - \overline{y})^2 \quad Q_{Err} = \sum_i (y_i - \tilde{y}_i)^2 \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$R^2 = Q_{Reg} \Big/ Q_{tot} \qquad \text{adj} R^2 = 1 - \big((N-1)/(N-p-1) \big) \cdot (1 - R^2)$$

$$s_{err}^2 = \sum_{i=1}^{p} e_i^2 \Big/ (N - p - 1)$$

$$s_{\beta_j}^2 = s_{Err}^2 \left[(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \right]_{jj} \qquad t_{\beta_j} = \left| \beta_j \right| \Big/ s_{\beta_j} > t_{\alpha, N-p-1}$$

$$b_j \in \beta_j \mp t_{\alpha; N-p-1} s_{\beta_j}$$

$$\sigma_{Err}^2 \in N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{\alpha/2; N-p-1}^2 ; N s_{Err}^2 \Big/ \chi_{1-\alpha/2; N-p-1}^2$$

$$Q_{Tot} = \sum_i (y_i - \overline{y})^2 \quad Q_{Err} = \sum_i (y_i - \tilde{y}_i)^2 \qquad Q_{Reg} = Q_{tot} - Q_{Err}$$

$$R^2 = Q_{Reg} \Big/ Q_{tot} \qquad \mathrm{adj} R^2 = 1 - \big((N-1) / (N - p - 1) \big) \cdot (1 - R^2)$$

$$F_{\mathrm{expr}} = R^2 (N - p - 1) \Big/ ((1 - R^2) p) = Q_{Reg} (N - p - 1) \Big/ (Q_{Err} p) > F_{\alpha, v_1, v_2}$$

$$v_1 = p, v_2 = N - p - 1$$

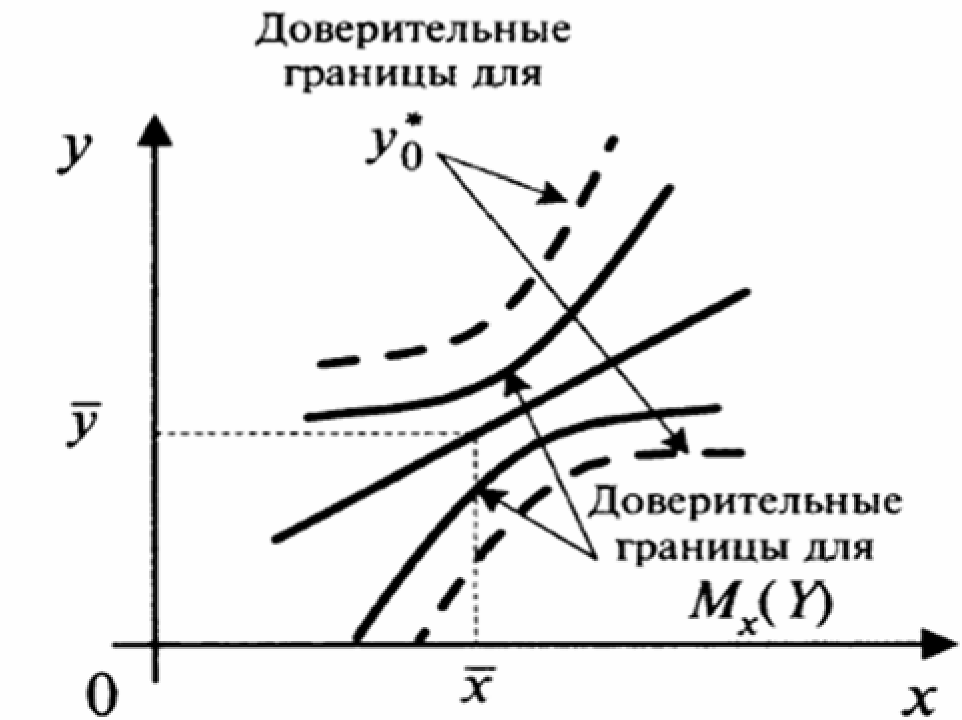
Групповая средняя

$$s_{\hat{y}} = s_{err}\sqrt{\mathbf{X}_a(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_a^{\mathrm{T}}} \qquad E\{Y|X_a\} \in \hat{y}(X_a) \mp t_{\alpha;N-p-1}s_{\hat{y}}$$

Стандартная ошибка индивидуального значения

$$s_{\hat{y}_a} = s_{err}\sqrt{1+\mathbf{X}_a(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}_a^{\mathrm{T}}}$$

$$y(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{pa}) \in \hat{y}(x_{1a}, x_{2a}, \ldots, x_{pa}) \mp t_{\alpha;N-p-1}s_{\hat{y}_a}$$



Мультиколлинеарность I

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \ldots & r_{1l} & \ldots & r_{1P} \\ r_{21} & 1 & \ldots & r_{2k} & \ldots & r_{2P} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{k1} & r_{k1} & \ldots & 1 & \ldots & r_{kP} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_{P1} & r_{P2} & \ldots & r_{Pk} & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

$$r_{kl|12\ldots k-1,k+1,\ldots l-1,l+1,\ldots} = -\frac{A_{kl}}{\sqrt{A_{kk}A_{ll}}}$$

A_{kl} – алгебраическое дополнение к элементу r_{kl}

Мультиколлинеарность II

Проверка с использованием индекса вздутия дисперсии (*Variance Inflation Factor, VIF*), который является количественной мерой степени мультиколлинеарности и для фактора X вычисляется по формуле

$$VIF(X) = \frac{1}{(1 - R^2)}$$

где R^2 – это коэффициент детерминации, полученный в результате регрессии фактора X на остальные факторы.

В случае сильной мультиколлинеарности $R^2 \sim 1$ и VIF будет велик. Если значение VIF превышает 5, то X исключается из дальнейшего анализа.

Мультиколлинеарность II

Проверка с использованием индекса вздутия дисперсии (*Variance Inflation Factor, VIF*), который является количественной мерой степени мультиколлинеарности и для фактора X вычисляется по формуле

$$VIF(X) = \frac{1}{(1 - R^2)}$$

где R^2 – это коэффициент детерминации, полученный в результате регрессии фактора X на остальные факторы.

В случае сильной мультиколлинеарности $R^2 \sim 1$ и VIF будет велик. Если значение VIF превышает 5, то X исключается из дальнейшего анализа.

Сначала рассматриваются все пары факторов и исключаются те, которые проявляют высокую степень мультиколлинеарности. Факторы, включенные в модель, не будут сильно коррелировать друг с другом, что позволит получить более точные оценки их влияния на целевую переменную.

Оценка полученных моделей на основе *AIC* (акайкского информационного критерия), который является мерой качества модели, учитывающей количество параметров в модели.

AIC оценивает относительную информационную потерю при использовании модели для описания процесса, генерирующего данные.

AIC штрафует за сложность модели (количество параметров), т.к сложная модель может переобучиться на тренировочных данных и плохо предсказывать новые данные.

AIC вычисляется по формуле

$$AIC = 2m - 2\ln L$$

где m – число параметров в модели;
L – максимальное значение функции правдоподобия для модели.

Модели с меньшим значением AIC предпочтительнее.

Квантильная регрессия

Кванти́льная регрессия является расширением классической линейной регрессии. В квантильной регрессии оцениваются параметры линейной связи между независимыми переменными и определённым уровнем квантиля зависимой переменной, что позволяет измерить влияние переменных не только в центре, но и на хвостах распределения интересующего показателя. Преимуществом оценок коэффициентов квантильной регрессии по сравнению с классической линейной регрессией является их большая устойчивость к «выбросам» в данных.

$$\mathrm{Prob}\{Y < f(X) \,|\, X\} = \tau$$

При $\tau = 0.5$ превращается в медианную регрессию

Даже при линейной зависимости она может быть разной для разных квантилей

$$f_\tau(Y|X) = X^{\mathrm{T}} b_\tau,\ 0 < \tau < 1$$

Оценки коэффициентов в квантильной регрессии вычисляются по:

$$\arg\min_b \left\{ \sum_{i=1}^{N} \rho_\tau \left(\left| y_i - X_i^{\mathrm{T}} \beta \right| \right) \right\} \Rightarrow \beta$$

$\rho_\tau(\tau) = \tau(\tau - I(\tau < 0))$ - функция потерь, I - индикаторная функция.

Для получения оценок в линейной регрессии минимизируется взвешенная (асимметричная) сумма модулей остатков:

$$\sum_i w_i \left| y_i - \hat{y}_i \right| \to \min \Rightarrow \beta \qquad w_i = \begin{cases} 1-\tau, & y_i < \hat{y}_i \\ \tau, & y_i < \hat{y}_i \end{cases}$$

$y_i, \hat{y}_i$ - истинное и предсказанное значения

$$\arg\min_b \left\{ \sum_{i \in \{i: y_i > x_i\beta\}} \tau \left| y_i - x_i\beta \right| + \sum_{i \in \{i: y_i < x_i\beta\}} \tau \left| y_i - x_i\beta \right| \right\} \Rightarrow \beta$$

Дисперсионный анализ

Номер наблюдения	Уровни фактора A					
	A_1	A_2	…	A_i	…	A_K
1	y_{11}	y_{21}	…	y_{i1}	…	y_{K1}
2	y_{12}	y_{22}	…	y_{i2}	…	y_{K2}
3	y_{13}	y_{23}	…	y_{i3}	…	y_{K3}
…	…	…	…	…	…	…
j	y_{1j}	y_{2j}	…	y_{ij}	…	y_{Kj}
…	…	…	…	…	…	…
n	y_{1n}	y_{2n}	…	y_{in}	…	y_{Kn}

$$N = Kn$$

Факторы могут определяться:
1) на случайных и 2) на фиксированных уровнях

Дисперсионный анализ

Номер наблюдения	Уровни фактора A					
	A_1	A_2	…	A_i	…	A_K
1	y_{11}	y_{21}	…	y_{i1}	…	y_{K1}
2	y_{12}	y_{22}	…	y_{i2}	…	y_{K2}
3	y_{13}	y_{23}	…	y_{i3}	…	y_{K3}
…	…	…	…	…	…	…
j	y_{1j}	y_{2j}	…	y_{ij}	…	y_{Kj}
…	…	…	…	…	…	…
n	y_{1n}	y_{2n}	…	y_{in}	…	y_{Kn}

$$N = Kn$$

Факторы могут определяться:
1) на случайных и 2) на фиксированных уровнях

Оценить влияние факторов на средние значения наблюдаемых величин

Случайные ошибки наблюдений распределены нормально;
Факторы влияют только на средние значения наблюдений;
Дисперсии наблюдений одинаковы, эксперименты равноточны.

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

$$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, i = \overline{1, K} \tag{2}$$

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij} \tag{1}$$

$$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \; i = \overline{1, K} \tag{2}$$

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{n_i} S_{A_i} \tag{3}$$

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij} \qquad (1)$$

$$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \; i = \overline{1, K} \qquad (2)$$

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{n_i} S_{A_i} \qquad (3)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \overline{y}_i \qquad (4)$$

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij},\ i = \overline{1, K} \quad (2)$$

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{n_i} S_{A_i} \quad (3)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}\overline{y}_i \quad (4)$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \overline{Y})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2\right] \quad (5)$$

$$y_{ij} = \mu + d_i + \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

$$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \, i = \overline{1, K} \quad (2)$$

$$\overline{y}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{n_i} S_{A_i} \quad (3)$$

$$\overline{Y} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^{K} \overline{y}_i \quad (4)$$

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} (y_{ij} - \overline{Y})^2 = \frac{1}{N-1} \left[\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij} \right)^2 \right] \quad (5)$$

Следует разложить общую выборочную дисперсию s^2 на составляющие, характеризующие вклад фактора A и фактора случайности. Фактор случайности оценивается по наличию повторных опытов на каждом уровне A_i фактора A.

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{Y})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2\right] \tag{5}$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij} - \bar{y}_i)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n} y_{ij}\right)^2\right] \tag{6}$$

Равноточности экспериментов соответствует однородность дисперсий s_1^2, s_2^2, …, s_K^2, которая может быть проверена по критерию Кохрена

(7)

$$s^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{Y})^2 = \frac{1}{N-1}\left[\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2 - \frac{1}{N}\left(\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\right)^2\right] \quad (5)$$

$$s_i^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(y_{ij}-\bar{y}_i)^2 = \frac{1}{n-1}\left[\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\right)^2\right] \quad (6)$$

Равноточности экспериментов соответствует однородность дисперсий $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_K^2$, которая может быть проверена по критерию Кохрена

Если между дисперсиями $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_K^2$ нет существенных различий, то

$$s_\varepsilon^2 = \frac{1}{K}\sum_{j=1}^{n}s_i^2 = \frac{1}{K(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n}y_{ij}^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{K}\left(\sum_{j=1}^{n}y_{ij}\right)^2\right] \quad (7)$$

$$v_\varepsilon = K(n-1) = N-K$$

$$\sigma_A^2 \approx s^2 - s_\varepsilon^2 \tag{8}$$

$$\sigma_A^2 \approx s^2 - s_\varepsilon^2 \tag{8}$$

Более точная оценка $$\sigma_A^2 \approx \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(\bar{y}_i - \bar{Y})^2 - \frac{s_\varepsilon^2}{n} \tag{9}$$

$$\sigma_A^2 \approx s^2 - s_\varepsilon^2 \tag{8}$$

Более точная оценка $$\sigma_A^2 \approx \frac{1}{K}\sum_{i=1}^{K}(\bar{y}_i - \bar{Y})^2 - \frac{s_\varepsilon^2}{n} \tag{9}$$

Дисперсия σ_A^2 фактора A в модели с фиксированными уровнями не связана со случайной величиной. Она определяет математическое ожидание среднего квадрата отклонения, обусловленного фактором A,

$$s_A^2 = \frac{n}{K-1}\sum_{i=1}^{K}(y_i - \bar{Y})^2 \approx n\sigma_A^2 + s_\varepsilon^2 \qquad \nu_A = K-1 \tag{10}$$

Если дисперсия $s_A{}^2$ значимо отличается от $s_\varepsilon{}^2$, нулевая гипотеза о равенстве дисперсий отвергается и влияние фактора A считается существенным. Проверяется нулевая гипотеза по критерию Фишера.

Альтернативой гипотезе $\sigma_A{}^2 = \sigma_\varepsilon{}^2$ – является неравенство $\sigma_A{}^2 > \sigma_\varepsilon{}^2$, которое проверяется при помощи одностороннего критерия Фишера. Влияние фактора *A* считается значимым, если

$$\frac{s_A^2}{s_\varepsilon^2} > F_{\alpha,\nu_A,\nu_\varepsilon}, \tag{11}$$

тогда нулевая гипотеза отвергается и

$$\sigma_A^2 \approx \frac{s_A^2 - s_\varepsilon^2}{n} \tag{12}$$

Общий алгоритм

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij},\ i = \overline{1,K} \qquad \text{(I)}$$

Общий алгоритм

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \; i = \overline{1,K} \qquad \text{(I)}$$

2) Сумма квадратов всех наблюдений $$SS_1 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 \qquad \text{(II)}$$

5) Сумма квадратов для фактора

Общий алгоритм

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij}, \; i = \overline{1, K} \qquad \text{(I)}$$

2) Сумма квадратов всех наблюдений $$SS_1 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 \qquad \text{(II)}$$

3) Сумма квадратов итогов по столбцам, деленная на число наблюдений в столбце

$$SS_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} A_i^2 \qquad \text{(III)}$$

Общий алгоритм

1) Сумма (итоги) по столбцам

$$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij},\ i = \overline{1, K} \quad \text{(I)}$$

2) Сумма квадратов всех наблюдений

$$SS_1 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 \quad \text{(II)}$$

3) Сумма квадратов итогов по столбцам, деленная на число наблюдений в столбце

$$SS_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} A_i^2 \quad \text{(III)}$$

4) Квадрат общего итога, деленный на число всех наблюдений

$$SS_3 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{K} A_i \right)^2 \quad \text{(IV)}$$

Общий алгоритм

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n} y_{ij},\ i = \overline{1, K} \qquad \text{(I)}$$

2) Сумма квадратов всех наблюдений $$SS_1 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n} y_{ij}^2 \qquad \text{(II)}$$

3) Сумма квадратов итогов по столбцам, деленная на число наблюдений в столбце

$$SS_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{K} A_i^2 \qquad \text{(III)}$$

4) Квадрат общего итога, деленный на число всех наблюдений

$$SS_3 = \frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^{K} A_i \right)^2 \qquad \text{(IV)}$$

5) Сумма квадратов для фактора $$SS_A = SS_2 - SS_3 \qquad \text{(V)}$$

6) Общая сумма квадратов $$SS_{\mathrm{Tot}} = SS_1 - SS_3 \qquad \text{(VI)}$$

6) Общая сумма квадратов $$SS_{\mathrm{Tot}} = SS_1 - SS_3 \quad \text{(VI)}$$

7) Остаточная сумма квадратов $$SS_{\varepsilon} = SS_1 - SS_2 \quad \text{(VII)}$$

6) Общая сумма квадратов $$SS_{\mathrm{Tot}} = SS_1 - SS_3 \qquad \text{(VI)}$$

7) Остаточная сумма квадратов $$SS_{\varepsilon} = SS_1 - SS_2 \qquad \text{(VII)}$$

8) Дисперсия фактора $$s_A^2 = \frac{SS_A}{\nu_A} \qquad \text{(VIII)}$$

6) Общая сумма квадратов $$SS_{\mathrm{Tot}} = SS_1 - SS_3 \qquad \text{(VI)}$$

7) Остаточная сумма квадратов $$SS_{\varepsilon} = SS_1 - SS_2 \qquad \text{(VII)}$$

8) Дисперсия фактора $$s_A^2 = \frac{SS_A}{\nu_A} \qquad \text{(VIII)}$$

9) Дисперсия случайной составляющей $$s_{\varepsilon}^2 = \frac{SS_{\varepsilon}}{\nu_{\varepsilon}} \qquad \text{(IX)}$$

Рассмотрим разное число измерений на каждом уровне A_i,

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_K$$

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \ i = \overline{1, K} \qquad \text{(Ia)}$$

Рассмотрим разное число измерений на каждом уровне A_i,

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_K$$

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \; i = \overline{1, K}$$ (Ia)

2) Сумма квадратов всех наблюдений $$SS_1 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$$ (IIa)

Рассмотрим разное число измерений на каждом уровне A_i,

$$N = n_1 + n_2 + \ldots + n_K$$

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij},\ i = \overline{1,K} \qquad \text{(Ia)}$$

2) Сумма квадратов всех наблюдений $$SS_1 = \sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 \qquad \text{(IIa)}$$

3) Сумма квадратов итогов по столбцам, деленная на число наблюдений в столбце

$$SS_2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i^2}{n_i} \qquad \text{(IIIa)}$$

Рассмотрим разное число измерений на каждом уровне A_i,

$$N = n_1 + n_2 + ... + n_K$$

1) Сумма (итоги) по столбцам $$S_{A_i} = \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}, \; i = \overline{1, K}$$ (Ia)

2) Сумма квадратов всех наблюдений $$SS_1 = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2$$ (IIa)

3) Сумма квадратов итогов по столбцам, деленная на число наблюдений в столбце

$$SS_2 = \sum_{i=1}^{K} \frac{A_i^2}{n_i}$$ (IIIa)

Если дисперсии $s_A{}^2$ и $s_\varepsilon{}^2$ значимо отличаются друг от друга, дисперсию фактора A вычисляют по формуле

$$\sigma_A^2 \approx \frac{(K-1)N}{N^2 - N}(s_A^2 - s_\varepsilon^2)$$ (12a)

Временные ряды

Теорема Вольда. Стационарный в широком смысле действительный СП Yt – может быть представлен в виде

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

где y_t – элементы рассматриваемого СП Y_t, $t = 0,1,2,\ldots$; ε_t – составляющие белого шума; b_j и μ – постоянные вещественные коэффициенты.

Временные ряды

Теорема Вольда. Стационарный в широком смысле действительный СП *Yt* – может быть представлен в виде

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

где y_t – элементы рассматриваемого СП Y_t, $t = 0,1,2,\ldots$; ε_t – составляющие белого шума; b_j и μ – постоянные вещественные коэффициенты.

$$y_t - \mu = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \ b_q \neq 0 \qquad \text{Модель MA}(q)$$

Временные ряды

Теорема Вольда. Стационарный в широком смысле действительный СП *Yt* – может быть представлен в виде

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

где y_t – элементы рассматриваемого СП Y_t, $t = 0,1,2,\dots$; ε_t – составляющие белого шума; b_j и μ – постоянные вещественные коэффициенты.

$$y_t - \mu = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},\ \ b_q \neq 0 \qquad \text{Модель MA}(q)$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \varepsilon_t,\ \ a_p \neq 0 \qquad \text{Модель AR(p)}$$

Временные ряды

Теорема Вольда. Стационарный в широком смысле действительный СП Yt – может быть представлен в виде

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

где y_t – элементы рассматриваемого СП Y_t, $t = 0,1,2,\ldots$; ε_t – составляющие белого шума; b_j и μ – постоянные вещественные коэффициенты.

$$y_t - \mu = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \; b_q \neq 0$$ Модель MA(q)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \varepsilon_t, \; a_p \neq 0$$ Модель AR(p)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \; a_p, b_q \neq 0$$ Модель ARMA(p,q)

Временные ряды

Теорема Вольда. Стационарный в широком смысле действительный СП *Yt* – может быть представлен в виде

$$y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} b_j \varepsilon_{t-j}$$

где y_t – элементы рассматриваемого СП Y_t, $t = 0,1,2,\ldots$; ε_t – составляющие белого шума; b_j и μ – постоянные вещественные коэффициенты.

$$y_t - \mu = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},\ b_q \neq 0$$ Модель MA(q)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \varepsilon_t,\ a_p \neq 0$$ Модель AR(p)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},\ a_p, b_q \neq 0$$ Модель ARMA(p,q)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k \Delta^d y_{t-k} = \gamma + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},\ a_p, b_q \neq 0$$ Модель ARIMA(p,d,q)

Модель MA(q)

$$y_t - \mu = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j}, \; b_q \neq 0$$

Процесс скользящего среднего порядка q независимо от значения его параметров является стационарным в широком смысле.

Процесс $MA(q)$ является обратимым тогда и только тогда, когда передаточная функция $b(z) \neq 0$ для всех $|z| \leq 1$, т. е. если корни z_k уравнения $b(z) = 0$ лежат *вне единичной окружности*, $|z_k| > 1, k = 1,2,\ldots q$.

$$E\{Y_t\} = E\{\mu\} + \sum_{j=0}^{q} b_j E\{\varepsilon_{t-j}\} = \mu = \text{const}$$

$$X_t = Y_t - \mu$$

$$\sigma_X^2 = \left(1 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_q^2\right)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathrm{cor}_X(\tau) = \begin{cases} \dfrac{b_\tau + b_1 b_{1+\tau} + b_2 b_{2+\tau} + \ldots + b_{q-\tau} b_q}{1 + b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_q^2}, \tau = 1, 2, 3, \ldots, q, \\ 0, \quad \tau > q. \end{cases}$$

Процесс $MA(1)$: $$x_t = \varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1}$$

$$\sigma_X^2 = E\{(\varepsilon_t + b_1 \varepsilon_{t-1})^2\} = (1 + b_1^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathrm{cor}_X(1) = \frac{b_1}{1 + b_1^2} \qquad \mathrm{cor}_X(\tau) = 0,\ \tau \ge 2$$

$$\varepsilon_t = (1 + \beta_1 \mathrm{B})^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j b_1^j x_{t-j}$$

$$\beta_j = (-1)^j b_1^j$$

$$b_1^2 - b_1 / \mathrm{cor}_X(1) + 1 = 0 \qquad |b_1'| < 1$$

Процесс $MA(2)$: $$x_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2}$$

$$-1 \le b_2 \le 1,\ 2|b_2| \le |b_1|,\ b_1^2 \ge 4b_2$$

$$\sigma_X^2 = (1 + b_1^2 + b_2^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathrm{cor}_X(1) = \frac{b_1 + b_1 b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2} \quad \mathrm{cor}_X(2) = \frac{b_2}{1 + b_1^2 + b_2^2} \quad \mathrm{cor}_X(\tau) = 0,\ \tau \ge 3$$

$$\varepsilon_t = (1 + \beta_1 \mathrm{B} + \beta_2 \mathrm{B}^2)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j}$$

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = -b_1,\ \beta_2 = b_1^2 - b_2,\ \beta_j = -b_1\beta_{j-1} - b_2\beta_{j-2},\ \ j = 3, 4, \ldots$$

Процесс $MA(3)$: $$x_t = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2} + b_3\varepsilon_{t-3}$$

$$\sigma_x^2 = E\{(\varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1} + b_2\varepsilon_{t-2})^2\} = (1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\sigma_\varepsilon^2$$

$$\operatorname{cor}_X(1) = \frac{b_1 + b_1 b_2 + b_2 b_3}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \qquad \operatorname{cor}_X(2) = \frac{b_2 + b_1 b_3}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}$$

$$\operatorname{cor}_X(3) = \frac{b_3}{1 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2} \qquad \operatorname{cor}_X(\tau) = 0,\ \tau \ge 4$$

$$\varepsilon_t = (1 + \beta_1 \mathrm{B} + \beta_2 \mathrm{B}^2 + \beta_3 \mathrm{B}^3)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j}$$

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = -b_1,\ \beta_2 = b_1^2 - b_2,\ \beta_3 = -b_1^3 + 2b_1 b_2 - b_3$$

$$\beta_j = -b_1\beta_{j-1} - b_2\beta_{j-2} - b_3\beta_{j-3},\ \ j = 4, 5, \ldots$$

Модель AR(p)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \varepsilon_t, \; a_p \neq 0$$

$$H(h) = h^p + a_1 h^{p-1} + a_2 h^{p-2} + \ldots + a_p$$

Корни характеристического полинома $H(h)$ по модулю меньше единицы

$$X_t = Y_t - E\{Y_t\}$$

$$1 = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) - a_2 \operatorname{cor}_X(2) - a_3 \operatorname{cor}_X(3) - \ldots - a_p \operatorname{cor}_X(p) + \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_X^2$$

$$\operatorname{cor}_X(1) = -a_1 - a_2 \operatorname{cor}_X(1) - a_3 \operatorname{cor}_X(2) - \ldots - a_p \operatorname{cor}_X(p-1)$$

$$\operatorname{cor}_X(2) = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) - a_2 - a_3 \operatorname{cor}_X(1) - \ldots - a_p \operatorname{cor}_X(p-2)$$

$$\operatorname{cor}_X(p) = -a_1 \operatorname{cor}_X(p-1) - a_2 \operatorname{cor}_X(p-2) - \ldots - a_{p-1} \operatorname{cor}_X(1) - a_p$$

$$\operatorname{cor}_X(\tau > p) = -a_1 \operatorname{cor}_X(\tau-1) - a_2 \operatorname{cor}_X(\tau-2) - \ldots - a_p \operatorname{cor}_X(\tau-p)$$

автокорреляционная функция $\operatorname{cor}_X(\tau)$ не обрывается при конечных значении τ, а асимпотически по τ стремится к нулю.

Для модели $AR(p)$, описывающей стационарый в широком смысле временной ряд, оператор $a(\mathcal{B})$ всегда обратим.

$$\mu = \frac{\gamma}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p}$$

если СП Y_t устойчив, то после выхода на установившийся режим математическое ожидание μ не зависит от времени

для оценки порядка модели $AR(p)$ удобно использовать *частную автокорреляционную функцию*

$$\begin{pmatrix} \mathrm{cor}_X(1) \\ \mathrm{cor}_X(2) \\ \mathrm{cor}_X(3) \\ \ldots \\ \mathrm{cor}_X(M) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & \mathrm{cor}_X(1) & \mathrm{cor}_X(2) & \ldots & \mathrm{cor}_X(M-1) \\ \mathrm{cor}_X(1) & 1 & \mathrm{cor}_X(1) & \ldots & \mathrm{cor}_X(M-2) \\ \mathrm{cor}_X(2) & \mathrm{cor}_X(1) & 1 & \ldots & \mathrm{cor}_X(M-3) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \mathrm{cor}_X(M-1) & \mathrm{cor}_X(M-2) & \mathrm{cor}_X(M-3) & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{M1} \\ a_{M2} \\ a_{M3} \\ \ldots \\ a_{MM} \end{pmatrix}.$$

Параметр a_{MM} модели $AR(M)$, рассматриваемый как функция задержки M, называется частной автокорреляционной функцией.

частная автокорреляционная функция $a_{MM} \neq 0$ при $M \leq p$ и $a_{MM} = 0$ при $M > p$, где p – истиный порядок модели.

Процесс $AR(1)$ $$y_t + a_1 y_{t-1} = m_c + \varepsilon_t$$

$$H(h) = h + a_1 \qquad |h_1| = |a_1| < 1$$

$$E\{y_t\} = \mu = \frac{\gamma}{1 + a_1} \qquad x_t + a_1 x_{t-1} = \varepsilon_t$$

$$1 = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) + \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_X^2 \qquad \operatorname{cor}_X(1) = -a_1$$

$$\operatorname{cor}_X(\tau) = -a_1 \operatorname{cor}_X(\tau - 1),\ \tau > 1 \qquad \operatorname{cor}_X(\tau) = (-a_1)^\tau$$

$$\sigma_\varepsilon^2 = (1 - \operatorname{cor}_X^2(1))\sigma_X^2$$

$$a_{11} = -\operatorname{cor}_X(1)$$

$$x_t = x_{-1}(-a_1)^{t+1} + \sum_{k=0}^{t} \varepsilon_{t-k}(-a_1)^k$$

Процесс $AR(2)$: $$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} = \gamma + \varepsilon_t$$

$$H(h) = h^2 + a_1 h + a_2 \qquad h_{1,2} = 0.5\ a_1 \pm \sqrt{a_1^2 + 4a_2}$$

$$-a_1 - a_2 < 1,\ \ a_1 + a_2 < 1,\ \ -1 < a_2 < 1$$

$$E\{y_t\} = \mu = \frac{\gamma}{1 + a_1 + a_2} \qquad x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$1 = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) - a_2 \operatorname{cor}_X(2) + \sigma_\varepsilon^2 \big/ \sigma_X^2$$

$$\operatorname{cor}_X(1) = -a_1 - a_2 \operatorname{cor}_X(1)$$

$$\operatorname{cor}_X(2) = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) - a_2$$

$$\operatorname{cor}_X(\tau) = -a_1 \operatorname{cor}_X(\tau - 1) - a_2 \operatorname{cor}_X(\tau - 2),\ \tau > 2$$

$$a_1 = -\operatorname{cor}_X(1) \frac{1 - \operatorname{cor}_X(2)}{1 - \operatorname{cor}_X(1)} \qquad a_2 = \frac{\operatorname{cor}_X^2(1) - \operatorname{cor}_X(2)}{1 - \operatorname{cor}_X^2(1)}$$

$$a_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -\operatorname{cor}_X(1) \\ \operatorname{cor}_X(1) & -\operatorname{cor}_X(2) \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cor}_X(1) \\ \operatorname{cor}_X(1) & 1 \end{vmatrix} = \frac{-\operatorname{cor}_x(2) + \operatorname{cor}_x^2(1)}{1 - \operatorname{cor}_x^2(1)}$$

Процесс $AR(3)$: $$y_t + a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3 y_{t-3} = m_c + \varepsilon_t$$

$$H(h) = h^3 + a_1 h^2 + a_1 h + a_2$$

$$E\{y_t\} = \mu = \frac{\gamma}{1 + a_1 + a_2 + a_3} \qquad x_t + a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + a_3 x_{t-3} = \varepsilon_t$$

$$1 = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) - a_2 \operatorname{cor}_X(2) - a_3 \operatorname{cor}_X(3) + \sigma_\varepsilon^2 / \sigma_X^2$$

$$\operatorname{cor}_X(1) = -a_1 - a_2 \operatorname{cor}_X(1) - a_3 \operatorname{cor}_X(2)$$

$$\operatorname{cor}_X(2) = -a_1 \operatorname{cor}_X(1) - a_2 - a_3 \operatorname{cor}_X(1)$$

$$\operatorname{cor}_X(3) = -a_1 \operatorname{cor}_X(2) - a_2 \operatorname{cor}_X(1) - a_3$$

$$\operatorname{cor}_X(\tau) = -a_1 \operatorname{cor}_X(\tau - 1) - a_2 \operatorname{cor}_X(\tau - 2) - a_3 \operatorname{cor}_X(\tau - 3),\ \tau > 3$$

$$a_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \operatorname{cor}_X(1) & -\operatorname{cor}_X(1) \\ \operatorname{cor}_X(1) & 1 & -\operatorname{cor}_X(2) \\ \operatorname{cor}_X(2) & \operatorname{cor}_X(1) & -\operatorname{cor}_X(3) \end{vmatrix} \Bigg/ \left\| \begin{matrix} 1 & \operatorname{cor}_X(1) & \operatorname{cor}_X(2) \\ \operatorname{cor}_X(1) & 1 & \operatorname{cor}_X(1) \\ \operatorname{cor}_X(2) & \operatorname{cor}_X(1) & 1 \end{matrix} \right\|$$

$$
\begin{aligned}
\hat{a}_1 + \hat{a}_2\rho_1 + \hat{a}_3\rho_2 &= -\rho_1, \\
\hat{a}_1\rho_1 + \hat{a}_2 + \hat{a}_3\rho_1 &= -\rho_2, \\
\hat{a}_1\rho_2 + \hat{a}_2\rho_1 + \hat{a}_3 &= -\rho_3
\end{aligned}
$$

Модель ARMA(p,q)

$$\sum_{k=0}^{p} a_k y_{t-k} = \gamma + \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},\ \ a_p, b_q \neq 0$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k E\{y_{t-k}\} = \gamma \qquad\qquad X_t = Y_t - E\{Y_t\}$$

$$\sum_{k=0}^{p} a_k x_{t-k} = \sum_{j=0}^{q} b_j \varepsilon_{t-j},\ \ a_p, b_q \neq 0$$

$$H(h) = h^p + a_1 h^{p-1} + a_2 h^{p-2} + \ldots + a_p$$

$$\varepsilon_t = b^{-1}(\mathrm{B}) a(\mathrm{B}) x_t = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k x_{t-k}$$

Процесс $ARMA(p,q)$ является сходящимся (устойчивым) и обратимым тогда и только тогда, когда $a(\zeta) \neq 0$ и $b(\zeta) \neq 0$ для всех $|\zeta| < 1$, другими словами, тогда и только тогда, когда корни уравнений $A(\zeta) = 0$ и $B(\zeta) = 0$ находятся за пределами единичного круга, $|\zeta_j| > 1$.

$$\mu = \frac{\gamma}{1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_p}$$

Процесс *ARMA*(1,1): $y_t + a_1 y_{t-1} = \gamma + \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1}$

$$E\{y_t\} + a_1 E\{y_{t-1}\} = \gamma \qquad x_t + a_1 x_{t-1} = \varepsilon_t + b_1\varepsilon_{t-1}$$

$$H(h) = h + a_1 \qquad h_1 = -a_1 \qquad |a_1| < 1$$

$$\mu = \frac{\gamma}{1 + a_1} \qquad \varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j x_{t-j}$$

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = a_1 - b_1,\ \beta_j = (-b_1)^{k-1}(a_1 - b_1),\ \ j = 2, 3, \ldots$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \left[1 + (b_1 - a_1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{2(j-1)} \right]$$

$$\mathrm{cor}_X(\tau) = (b_1 - a_1)(-a_1)^{\tau-1} \frac{1 + (b_1 - a_1)\sum_{j=1}^{\infty}(-a_1)^{2j-1}}{1 + (b_1 - a_1)^2 \sum_{j=1}^{\infty} a_1^{2(j-1)}}$$

$$\sigma_X^2 = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - a_1 + b_1(b_1 - a_1)}{1 - a_1^2}$$

$$\operatorname{cov}_X(1) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{(b_1 - a_1) + a_1(a_1 - b_1^2)}{1 - a_1^2}$$

$$\operatorname{cov}_X(\tau) = \sigma_\varepsilon^2 \frac{1 - a_1 + b_1(b_1 - a_1)}{1 - a_1^2}(-a_1)^{\tau-1}, \tau > 1$$

$$\hat{a}_1 = -\frac{\rho_X(2)}{\rho_X(1)}$$

Из соотношений Юла-Уокера для σ_X^2 и $\operatorname{cor}_X(1)$

$$(\hat{b}_1 - \hat{a}_1) + \hat{a}_1(\hat{a}_1 - \hat{b}_1^2) = \rho_X(1)\Big((1 - \hat{a}_1) + \hat{b}_1(\hat{b}_1 - \hat{a}_1)\Big)$$

БЛАГОДАРЮ ЗА ВНИМАНИЕ!